Geometri i ekstensjonsrom til vektorbunter på kurver

george.h.hitching@hive.no

14. september 2010

Mye av dette er samarbeid med Insong Choe (Konkuk Univ., Seoul).

La C være en kompleks projektiv glatt kurve, og la

$$0 \to E \to W \to F \to 0$$

være en ekstensjon av vektorbunter på X, med klasse $\delta(W) \in H^1(X, \mathrm{Hom}(F, E))$.

La $\phi\colon G \to F$ være en knippeavbildning.

Når finnes det en løfting av ϕ til W?

Proposisjon 1 *(Narasimhan–Ramanan mfl.) Avbildningen ϕ faktoriserer via W hvis og bare hvis $\delta(W)$ hører til kjernen av den naturlige avbildningen*

$$\phi^*\colon H^1(X, \mathrm{Hom}(F, E)) \to H^1(X, \mathrm{Hom}(G, E)).$$

Geometri av ekstensjoner av rang to

La C være en kurve av genus $g \geq 2$. Vi betrakter ekstensjoner

$$0 \to E \to W \to F \to 0$$

der E og F er *linje*bunter.

Via Serredualitet, gjelder

$$H^1(C, \mathrm{Hom}(F, E)) \cong H^0(C, K_C \cdot F \cdot E^{-1})^*.$$

Dermed gir den vanlige avbildningen

$$\psi \colon C \dashrightarrow |K_C \cdot F \cdot E^{-1}|^*$$

et bilde av C i $\mathbb{P}H^1(C, \mathrm{Hom}(F, E))$.

For oss vil $\phi\colon G \to F$ oftest være en injeksjon av lokalt frie knipper.

Et underknippe $G \subseteq F$ må være

$$F \otimes O_C(-D) =: F(-D)$$

der D er en effektiv divisor på C.

Proposisjon 2 (Lange–Narasimhan) *Et underknippe $F(-D)$ av F kan løftes til en ekstensjon W hvis og bare hvis klassen $\delta(W)$ hører til sekanten til C utspent av $\psi(D)$ i $\mathbb{P}H^1(C, \mathrm{Hom}(F, E))$.*

Anvendelser

- Lange–Narasimhan (1983) gav mange resultater om maksimale linjeunderbunter av bunter av rang to.

- C. Pauly (2002) brukte slike ekstensjonsrom for å studere Cobles kvartiske hyperflate i $\mathbb{P}^7$.

- T. Johnsen (2003) karakteriserte korrigerbare feil ved Goppakoder produsert fra algebraiske kurver over endelige kropper, m.h.p. egenskaper av visse ekstensjoner definert av feilene.

Bunter av høyere rang på kurver

La V en vektorbunt på C og $\pi\colon \mathbb{P}V \to C$ den tilsvarende skruen.

Ved Serredualitet og projeksjonsformelen har vi en isomorfi

$$H^1(C,V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}V, \pi^* K_C \otimes O_{\mathbb{P}V}(1))^*.$$

Dermed får vi en naturlig avbildning

$$\psi\colon \mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}H^1(C,V).$$

Vi fokuserer på tilfellet $V = \mathrm{Hom}(F,E)$.

Nøkkelpoeng: Finn et *geometrisk* kriterium for løftingen av $\phi\colon G \to F$, mhp bildet av $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(F,E)$ i $\mathbb{P}H^1(C, \mathrm{Hom}(F,E))$.

Egenskaper av ψ

- Lineær på hver fiber

- En morfi dersom
$$h^0(C,V) = h^0(C,V(x))$$
for alle $x \in C$

- En embedding dersom
$$h^0(C,V) = h^0(C,V(x+y))$$
for alle effektive divisorer $x+y$ på C

Hvis $V = \mathrm{Hom}(F,E)$, er ψ embedding dersom E og F er stabile og
$$\frac{\deg(F)}{\mathrm{rk}(F)} > \frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)} + 2.$$

Tilbake til løftinger og geometri

Vi fokuserer på to spesialtilfeller.

Situasjon 1. Knippet G er en *elementær transformasjon* av F:

$$0 \to G \xrightarrow{\phi} F \to \tau \to 0$$

der τ er et torsjonsknippe av lengde $k \geq 0$.

Situasjon 2. Avbildningen ϕ faktoriserer

$$G \to G(D) \to F$$

der D er en effektiv divisor på C, avbildningen $G \to G(D)$ er indusert av

$$O_C \to O_C(D)$$

og $G(D)$ er en underbunt av F.

Situasjon 1.

Sekantvarieteter

La Y være en (muligens singulær) undervarietet av $\mathbb{P}^N$.

Sekantvarieteten $\mathrm{Sec}^k Y$ er definert som Zariski-tillukningen til unionen av alle de projektive rommene utspent av k forskjellige punkter av Y.

Den forventede dimensjonen til $\mathrm{Sec}^k Y$ er

$$\min\{N, k(\dim(Y) + 1) - 1\}.$$

For hvert $x \in C$, definerer vi

$\Delta|_x :=$ $\mathbb{P}\{$alle avbildninger $F|_x \to E|_x$ av rang 1$\}$

Når x gjennomløper C, danner $\Delta|_x$-ene en kvadrikkbunt Δ inne i skruen $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(F, E)$.

Vi betrakter bildet av Δ ved avbildningen

$$\psi\colon \mathbb{P}\mathrm{Hom}(F, E) \dashrightarrow \mathbb{P}H^1(C, \mathrm{Hom}(F, E)).$$

Kriterium 3 (Choe, –) *En elementær transformasjon $G \subset F$ av grad* $\deg(F) - k$ *kan løftes til W hvis og bare hvis $\delta(W)$ hører til en tett undermengde av* $\mathrm{Sec}^k\Delta$ *som inneholder alle "generelle" sekanter, altså sekanter utspent av k forskjellige punkter av Δ.*

Anvendelse

La $W \to C$ være en vektorbunt av rang n og grad d.

Teorem 4 (Hirschowitz (1986)) *For hver $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, inneholder W en underbunt av rang r og grad minst lik*

$$d_r := \frac{(r \cdot \mathrm{deg}(W) - r(n-r)(g-1) - \varepsilon)}{n}$$

der $0 \leq \epsilon \leq n-1$ er slik at $d_r \in \mathbb{Z}$.

Choe–H. (2010) brukte geometri i ekstensjonsrom for å gi et nytt bevis.

Trinnene i bevis

1. Hvis $d \gg 0$, kan en generell W av rang r og grad d skrives som en ekstensjon

$$0 \to E \to W \to F \to 0$$

der E og F er generelle bunter av henholdsvis rang $n-r$ og r, og grad 0 og d.

2. Sekantvarieteten $\mathrm{Sec}^k \Delta$ har den forventede dimensjonen for alle k (Terracini-lemma). Hvis $k = d - d_r$, får vi hele rommet.

3. Kriteriet for løfting tilsier: Alle ekstensjonene inneholder et underknippe av rang r og grad minst d_r.

Symplektiske bunter

En bunt $W \to C$ kalles *symplektisk* dersom det er en global bilineær ikkedegenerert antisymmetrisk form $\omega\colon W \otimes W \to O_C$.

M.a.o. finnes det en antisymmetrisk isomorfi $W \xrightarrow{\sim} W^*$.

En symplektisk bunt har rang $2n$.

En underbunt E kalles *isotropisk* dersom $\omega(E \otimes E) = 0$.

En isotropisk underbunt har rang $\leq n$. Hvis E har rang n, da er W en ekstensjon

$$0 \to E \to W \to E^* \to 0.$$

Symplektiske ekstensjoner

Til gjengjeld, hvis $h^0(C, \mathsf{End}(E)) = 1$, har vi:

Kriterium 5 (Ramanan,–) *En ekstensjon*

$$0 \to E \to W \to E^* \to 0$$

er indusert av en symplektisk struktur hvis og bare hvis

$\delta(W) \in H^1(C, \mathsf{Sym}^2 E) \subset H^1(C, \mathsf{Hom}(E^*, E))$.

Geometri av symplektiske ekstensjoner

Vi har et kommutativt diagram

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}E & \xrightarrow{\text{Segre}} & \Delta \\
\downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
\mathbb{P}\mathrm{Sym}^2 E & \to & \mathbb{P}(E \otimes E) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{P}H^1(C, \mathrm{Sym}^2 E) & \to & \mathbb{P}H^1(C, E \otimes E)
\end{array}
$$

Kriterium 6 *La* $0 \to E \to W \to E^* \to 0$ *være en symplektisk ekstensjon. Da løfter en elementær transformasjon* $F \subset E^*$ *av grad* $\deg(E^*) - k$ *til et isotropisk underknippe av* W *hvis og bare hvis* $\delta(W)$ *hører til en tett undermengde av* $\mathrm{Sec}^k \mathbb{P}E$.

Teorem 7 (Choe,–) *Enhver symplektisk W har en isotropisk underbunt av rang n og grad større enn eller lik*

$$d_n := -\frac{(n(g-1)+\varepsilon)}{2}$$

der $\varepsilon \in \{0, 1\}$ er slik at $d_n \in \mathbb{Z}$.

Beviset er veldig likt det forrige tilfellet.

Et annet spørsmål: Hvor ofte er en maksimal isotropisk underbunt også en maksimal underbunt?

Situasjon 2.

Avbildningen ϕ faktoriserer

$$G \to G(D) \xrightarrow{\overline{\phi}} F$$

der D er en effektiv divisor på C, avbildningen $G \to G(D)$ er indusert av

$$O_C \to O_C(D)$$

og $G(D)$ er en underbunt av F.

For å gi et kriterium for løfting i situasjon 2, må vi definere noen nye varieteter.

Oskulerende rom

La Y være en varietet, $L \to Y$ en veldig ampel linjebunt, og

$$\psi\colon Y \hookrightarrow |L|^* = \mathbb{P}^N$$

embeddingen. La y et punkt av Y. Det k-te *oskulerende rommet* til Y i y defineres som underrommet av $|L|^*$ utspent av alle partielle derivasjonsoperatorer av grad $\leq k$ i punktet y. Vi betegner rommet $\mathrm{Osc}^k(Y, y)$.

F.eks., $\mathrm{Osc}^0(Y, y) = \{y\}$

og $\mathrm{Osc}^1(Y, y)$ er det embeddede tangentrommet til Y i y.

Tilbake til $\phi\colon G \to G(D) \hookrightarrow F$:

Først betrakter vi underbunten

$$\mathrm{Ker}\left(\overline{\phi}^*\colon \mathrm{Hom}(F,E) \to \mathrm{Hom}(G(D),E)\right)$$

av $\mathrm{Hom}(F,E)$.

Nå skriver vi $D = \Sigma_{i=1}^t k_i x_i$ der $x_i$ene er forskjellige.

Da noterer vi $N(\phi)$ unionen av $\mathbb{P}\mathrm{Ker}\left(\overline{\phi}^*\right)$ og

$$\bigcup_{i=1}^t \left(\bigcup_{\nu \in \mathbb{P}\mathrm{Hom}(F,E)|_{x_i}} \mathrm{Osc}^{k_i}(\mathbb{P}\mathrm{Hom}(F,E),\nu) \right).$$

Kriterium 8 *La W være en ekstensjon av F ved E, og $\phi\colon G \to E$ som ovenfor. Da kan ϕ løftes til W hvis og bare hvis $\delta(W)$ hører til* Span $(N(\phi))$.

Anvendelse: Det geometriske Riemann–Roch teoremet

Anta at C ikke er hyperelliptisk. Vi har den kanoniske kurven

$$\psi \colon C \hookrightarrow |K_C|^*.$$

La L være en linjebunt av grad $g-1$ på C, med $h^0(C, L) = n \geq 1$.

Teorem 9 (Geom. RR) *For enhver $D \in |L|$ gjelder*

$$\begin{aligned} h^0(X, L) &= g - 1 - \dim(\mathrm{Span}(D)) \\ &= \mathrm{codim}\,(\mathrm{Span}(D), |K_C|^*) \end{aligned}$$

Bunter av høyere rang

Anta at C er generell og E er en generell stabil bunt av rang r og grad $r(g-1)$ med $h^0(C,E) = n \geq 1$.

Da kan det bevises at

$$\psi\colon \mathbb{P}\mathrm{End}(E) \dashrightarrow \mathbb{P}H^1(C, \mathrm{End}(E))$$

er en embedding.

La $s\colon O_C \to E$ være en seksjon av E.

Vi skriver $D = \Sigma_{i=1}^t k_i x_i$ for divisoren der s er null. Da vil s faktorisere som

$$O_C \to O_C(D) \xrightarrow{\overline{s}} E$$

(Hvis $r \geq 2$ vil D generelt være tom.)

Vi definerer $N(s)$ som ovenfor, som unionen av $\mathbb{P}\mathrm{Ker}\,(\overline{s}^*)$ og

$$\bigcup_{i=1}^{t}\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{P}\mathrm{End}(E)|_{x_i}}\mathrm{Osc}^{k_i}(\mathbb{P}\mathrm{End}(E),\nu)\right)$$

Teorem 10 (Generalisert GRR) *For enhver ikke-null seksjon s av E, gjelder*

$$h^0(C,E)=\mathrm{codim}\Big(\mathrm{Span}\,(N(s))\,,\mathbb{P}H^1(X,\mathrm{End}(E))\Big)\,.$$

Bevis

For enhver ikke-null $s\colon O_C \to E$, er den induserte avbildningen

$$s^*\colon H^1(C, \mathrm{End}(E)) \to H^1(C, E)$$

surjektiv. Derfor gjelder

$$\dim(\mathrm{Ker}(s^*)) = h^1(C, \mathrm{End}(E)) - h^1(C, E).$$

Dermed er dim (Span($N(s)$)) lik

$$h^1(C, \mathrm{End}(E)) - h^1(C, E) - 1$$

ved kriteriet for løfting.

Da $\chi(E) = 0$, har vi $h^1(C, E) = h^0(C, E)$. Derfor er $h^0(C, E)$ lik

$$\Big(h^1(C, \mathrm{End}(E)) - 1\Big) - \dim\left(\mathrm{Span}(N(s))\right),$$

altså,

$$\mathrm{codim}\Big(\mathrm{Span}(N(s)), \mathbb{P}H^1(C, \mathrm{End}(E))\Big)$$

som vi trengte. $\square$

Anvendelse til deformasjonsteori

La E være som før, og s en seksjon av E.

Deformasjoner av E svarer til ekstensjoner

$$0 \to E \to \mathbb{E} \to E \to 0.$$

Naturlig spørsmål: Hvilke deformasjoner bevarer s?

Kriterium 11 *En deformasjon $\mathbb{E}$ bevarer s dersom s kan løftes til en seksjon av $\mathbb{E}$,*

altså,

dersom klassen $\delta(\mathbb{E})$ hører til

$$\text{Span}(N(s)) \subseteq H^1(C, \text{End}(E)).$$

Med dette kan man generalisere *Riemann–Kempf Singulæritetsteoremet* om tangentkjegler til thetadivisoren W^{g-1} til bunter av høyere rang.