ASOR

"Hochschild kohomologi, Harrison Kohomologi og deformasjoner"

Eivind Eriksen (Apr. 18 2012)

PLAN:
1. Hochschild kohomologi
2. Deformasjoner av algebraer
3. Harrison kohomologi og defm. av kommutative algebraer

—

1. Hochschild kohomologi

k kropp
A k-algebra (assosiativ)
(Q A-A bimodul)

$$HH^n(A,Q) := H^n(HC^*(A,Q))$$

Hochschild kohomologi av A med verdier i Q

i) $Q = A$: $HH^n(A) = HH^n(A,A)$
→ deformasjoner av A

ii) $Q = \mathrm{Hom}_k(M,N)$: $HH^n(A, \mathrm{Hom}_k(M,N))$
(M,N A-mod.)
→ deformasjoner av M (med $N=M$), Kodaira-Spencer, konneksjoner, ...

Defn:

$$HC^0 \xrightarrow{d^0} HC^1 \xrightarrow{d^1} HC^2 \longrightarrow HC^3 \longrightarrow \cdots$$

$HC^0 = Q$, $HC^1 = \mathrm{Hom}_k(A,Q)$, $HC^2 = \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, Q)$, $HC^3 = \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A \otimes_k A, Q)$

$f \in HC^n = \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A \otimes_k \cdots \otimes_k A, Q)$: $\quad f(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \in Q$

$$\rightsquigarrow$$

$$(d^n f)(a_1, \ldots, a_{n+1}) = a_1 \cdot f(a_2, \ldots, a_{n+1}) - f(a_1 a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) + \cdots$$
$$+ (-1)^n f(a_1, a_2, \ldots, a_n a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n)\, a_{n+1}$$

Kohomologi-grupper av lav orden:

$$HH^0(A,Q) = \ker(d^0) = \{q \in Q : aq - qa = 0\}$$

$\underline{Q=A}$: $HH^0(A) = Z(A)$ senteret til A

$$HH^1(A,Q) = \ker(d^1)/\operatorname{im}(d^0)$$

$$= \frac{\{D : A \to Q \text{ s.t. } aD(b) - D(ab) + D(a)b = 0\}}{\{D : A \to Q \text{ st. } D(a) = aq - qa \text{ for } q \in Q\}}$$

$$= \frac{\mathrm{Der}_k(A,Q)}{\text{indre der.}}$$

$\underline{Q=A}$:

$$HH^1(A) = \frac{\mathrm{Der}_k(A)}{\text{indre der.}}$$

$$HH^2(A,Q) = \ker(d^2)/\operatorname{im}(d^1)$$

$$\ker(d^2) = \{D : A \otimes_k A \to Q \text{ st. } aD(b,c) - D(ab,c) + D(a,bc) - D(a,b)c = 0\}$$

<u>Resultat:</u>

i) $HH^n(A,Q) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,Q)$ hvor $\begin{cases} A^e = A \otimes_k A^{op} \\ A, Q: \text{ A-A bimoduler} = \text{venstre } A^e\text{-mod.} \end{cases}$

ii) $Q = A$ gir $HH^n(A) \simeq \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,A)$

$Q = \mathrm{Hom}_k(M,N)$ gir $HH^n(A, \mathrm{Hom}_k(M,N)) \simeq \mathrm{Ext}^n_A(M,N)$

<u>Eks:</u> $A = k[x]$ Finn $HH^n(A)$.

$A^e = k[x] \otimes_k k[x^{op}] \simeq k[x,y]$ og $1 \in A$ genererer A som A^e-modul

$0 \leftarrow A \leftarrow A^e \xleftarrow{(x-y)} A^e \leftarrow 0$ fri oppløsning siden $x \cdot 1 = 1 \cdot x \Rightarrow (x - x^{op}) \cdot 1 = 0$

$A \xrightarrow[(x-y)]{} A \longrightarrow 0 \Rightarrow \boxed{HH^n(A) = \begin{cases} A, & n = 0,1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}}$

② Deformasjoner av algebraer

Def_A = deformasjonsfunktoren til A (ass. k-alg.)

$R \in \underline{\ell}$: $k \to R \to k$
lokal k-algebra
med res. kropp k

R Artinsk
Kommutativ

Deformasjoner av A parametrisert av R:

A_R : assosiativ R-algebra
med iso. $\eta: k \otimes_R A_R \simeq A$
slik at

(*) A_R er R-flat

Funktor: $\mathrm{Def}_A : \underline{\ell} \to \underline{\mathrm{Sets}}$

$\mathrm{Def}_A(R) = \{(A_R, \eta) \text{ s.a.} \dots\}/\sim$

Merk: I defn. ovenfor er følgende ekvivalent:

i) A_R er R-flat

ii) $\mathrm{Tor}_1^R(k, A_R) = 0$

iii) $A_R \simeq R \otimes_k A$ som R-R bimodul

Eksplisitt beskrivelse av deformasjoner: A, R gitt

Velg basis$/k$ for R, $\{r_i : 0 \le i \le l\}$ s.a. $r_0 = 1$

Velg $A_R = R \otimes_k A$ som R-R bimodul. Vi må bestemme multiplikasjon i A_R

i) Siden $(r \otimes a) \cdot (s \otimes b) = r \cdot (1 \otimes a) \cdot (1 \otimes b) \cdot s$ er mult. bestemt av $(1 \otimes a) \cdot (1 \otimes b) \in R \otimes_k A$, altså $\mu_R: A \otimes_k A \to R \otimes_k A$

Kan betrakte $\mu_R \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, R \otimes_k A) \simeq R \otimes \mathrm{Hom}_k(A \otimes A, A)$.

ii) Eksplisitt har vi

$$\underset{(1\otimes a)\cdot(1\otimes b)}{\underset{\parallel}{\mu_R(a,b)}} = \underset{1 \otimes \mu(a,b)}{\underset{\parallel}{1 \otimes ab}} + \sum_{i=1}^{l} r_i \otimes \delta(r_i)(a,b)$$

Hvor $\underline{\delta} = \{\delta(r_i) \mid i = 0, \dots, l\}$ med $\delta(r_i) \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$
$\delta(1) = \mu$ (mult. på A)

Omvendt, har vi en familie $\underline{\delta} = \{\delta(r_i) : A \otimes_k A \to A \quad i = 0, \dots, l\}$ så gir dette en defm. av A til R hvis følgende betingelser er oppfylt:

i) $\delta(r_0) = \delta(1) = \mu$ (mult. på A)

ii) $\delta(r_i)(a \otimes b) = 0$ hvis $a = 1$ eller $b = 1$ ($1 \otimes 1$ skal være identiteten i A_R)

iii) $(1 \otimes a) \cdot [(1 \otimes b)(1 \otimes c)] = [(1 \otimes a)(1 \otimes b)](1 \otimes c)$ (assosiativitet)

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{1 \le i \le l} r_i \otimes \left[a\,\delta(r_i)(b,c) - \delta(r_i)(ab,c) + \delta(r_i)(a,bc) - \delta(r_i)(a,b)c \right]$$

$$+ \sum_{1 \le i,j \le l} r_i r_j \otimes \left[\delta(r_j)(\delta(r_i)(a,b),c) - \delta(r_j)(a, \delta(r_i)(b,c)) \right] = 0$$

<u>Konkl:</u> Hvis $(R, m) \in \underline{\ell}$ er slik at $\underline{m}^2 = 0$, så er ass. oppfylt hvis og bare hvis $\delta(r_i)$ er en 2-kosykel i $HC^*(A)$

<u>$R = k[\varepsilon]$:</u> $\boxed{t(\mathrm{Def}_A) = \mathrm{Def}_A(k[\varepsilon]) = HH^2_*(A)}$

$HH^n_*(A) := H^n(HC^*_*(A))$ hvor $HC^*_*(A) \subseteq HC^*(A)$ er underkomplekset definert ved $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ hvis $a_i = 1$ for en i

Eks: $A = k[x]$: $\Rightarrow$ $HH^2_*(A) = 0$ A er rigid

$A = k[x]/(x^2)$:

$HC^*_*(A)$: $\quad A \xrightarrow{d^0} A \xrightarrow{d^1} A \xrightarrow{d^2} A \xrightarrow{d^3} A \to \dots$

siden $\{ f \in \mathrm{Hom}_k(A\otimes \dots \otimes A, A) \text{ s.t. } f(a_1,\dots,a_n) = 0 \text{ for } a_i = 1 \}$
$= \{ f(x\otimes x, \dots, x) \in A \}$

Vi har:

$$d^n(f) = \begin{cases} 0, & n \text{ jevn} \\ 2x\cdot f, & n \text{ odde} \end{cases}$$

Derfor er

$$HH^2_*(A) = \frac{k + k\cdot x}{k\cdot x} \simeq k\cdot 1$$

Eksplisitt har vi:

$A_R = A + \varepsilon A$ med $(1\otimes a)(1\otimes b) = 1 \otimes ab + \varepsilon \cdot \delta(\varepsilon)(a,b)$

hvor $\delta_\varepsilon(a,b) = \begin{cases} 1, & a = b = x \\ 0, & a = 1 \text{ eller } b = 1 \end{cases}$

Dvs:

$(1\otimes 1)\cdot(1\otimes 1) = 1\otimes 1$
$(1\otimes x)\cdot(1\otimes 1) = 1\otimes x$
$(1\otimes 1)\cdot(1\otimes x) = 1\otimes x$
$(1\otimes x)\cdot(1\otimes x) = \varepsilon\otimes 1$

② Harrison kohomologi og defm. av kommutative algebraer

Anta A kommutativ k-algebra.

<u>Intuisjon:</u> Skal vi deformere A som kommutative alg. (dvs. vi krever at A_R komm. R-algebra) så blir $t(\mathrm{Def}_A^{\text{komm.}}) \subseteq t(\mathrm{Def}_A^{\text{ass.}}) = HH^2_*(A)$

$\delta(\varepsilon) \in HC^2_*(A)$ 2-kosykel må tilfredsstille

$$\delta(\varepsilon)(a,b) = \delta(\varepsilon)(b,a)$$

Harrison kohomologi:

Anta $\sigma \in S_n$ og $1 \leq r \leq n-1$:

σ er $(r, n-r)$-stokking (<u>shuffle</u>) om $\begin{cases} \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(r) \\ \text{og} \\ \sigma(r+1) < \dots < \sigma(n) \end{cases}$

Shuffle-produkt (stokkingsprodukt)

$$\underbrace{(A \otimes_k \dots \otimes_k A)}_{r} \otimes \underbrace{(A \otimes_k \dots \otimes_k A)}_{n-r} \longrightarrow A \otimes_k A \otimes \dots \otimes A$$

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_r) * (a_{r+1} \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{\substack{\sigma \text{ er} \\ (r,n)- \\ \text{stokking}}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$= \sum (-1)^{|\sigma|} \cdot (a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)})$$

<u>$n=2, r=1$:</u> $(1,2)$ og $(2,1)$ er $(1,2)$-stokkinger

$$a_1 * a_2 = a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$$

Defn: $HH^n_{Harr.}(A) := H^n(HC^*_{Harr.}(A))$, der

$HC^*_{Harr.} \subseteq HC^*$ er definert ved at $f(\text{shuffle-prod}) = 0$.

$$HH^2_{Harr.}(A) = \{f \in HH^2(A) : f(a,b) = f(b,a)\}$$

Resultat: Anta k kropp av karakteristikk 0. Da har vi

$$A^n(k, A; A) \simeq HH^{n+1}_{*,Harr}(A)$$

Oppgave: Regn ut kohomologi-gruppene for $A = k[x,y]$.