BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Calogero-Moser Rom

Algebraseminar, Eivind Eriksen (BI Nydalen 16/02/2011)

i) Motivasjon:

Anta $k = \mathbb{C}$, $A_0 = k[x,y] \longrightarrow$ se på $\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{A}^2}$

$\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{A}^2}$ Parametriserer:

① $\{I \subseteq A_0 : \text{ideal s.a. } A_0/I \text{ har dim. } n\}$

② $\{(V, v_0) : V$ end. dim. representasjon av A_0 (dim n), $v \in V_0$ syklisk vektor$\}/\sim$

$$I \subseteq A \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} A_0 \to A/I = V \\ 1 \mapsto v_0 \end{array}\right\}$$

$$(V, v_0) \rightsquigarrow I = \mathrm{Ann}(v_0) = \{a \in A : a v_0 = 0\}$$
$$(A_0/I \simeq A_0 \cdot v = V)$$

Eks: $n = 2$

$$\mathrm{Hilb}^2_{\mathbb{A}^2} = \{(X, Y, i) : X, Y \in M_2(k),\ i \in k^2\}/GL(2) \qquad g \cdot (X, Y, i) = (gXg^{-1}, gYg^{-1}, gi)$$

Anta X eller Y har to distinkte egenverdier. Da får vi:

$$\left\{ X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{med } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ eller } \mu_1 \neq \mu_2 \right\} \subseteq \mathbb{A}^4$$

(koordinater $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$)

Ref: Nakajima "Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces".

BI HANDELSHØYSKOLEN Nydalsveien 37, 0484 Oslo Postadresse 0442 Oslo Telefon 06600 Telefaks 21 04 80 00 Studieinfo. tlf. 810 00 500 www.bi.no info@bi.no Org. nr. 971 22 8865

Hva om vi erstatter $A_0 = k[x,y]$ med $A_q = \frac{k\langle x,y\rangle}{(yx-xy-q)}$, en ikke-kommutativ deformasjon? Dvs, vi ser på

$$A = A_1 = k\langle x,y\rangle / (yx-xy-1) \quad ; \text{ Weyl-algebraen}$$

<u>Merk:</u> Dersom $A \to \mathrm{End}_k(V)$ er repr. av Weyl-alg. av dim n,
$$x \mapsto X$$
$$y \mapsto Y$$
så har vi $YX - XY = I_n \Rightarrow \mathrm{tr}\,[Y,X] = \mathrm{tr}\, I_n \Rightarrow 0 = n$,
Dvs: A_1 har <u>ingen</u> end. dim. representasjoner.

- For å generalisere Hilbert-skjemaet til A_1 må vise på visse ikke-ass. moduler = A_∞-moduler.
- Dersom man tenker at punktene i ikke-kommutativ algebraisk geometri er (Simple / indekomposable) end. dim. representasjoner, gir dette også mulighet for punkter for Weyl-algebraen.

ii) <u>Calogero-Moser Rom:</u>

<u>Defn:</u> $\tilde{C}_n = \{ (X,Y,i,j) : X,Y \in \mathrm{End}_k(k^n) = M_n(k),\ i \in \mathrm{Hom}_k(k,k^n),$
$j \in \mathrm{Hom}_k(k^n,k) ;\ YX - XY - I_n = ij \}$

$$C_n = \tilde{C}_n / GL(n), \text{ der } \left\{ \begin{array}{l} g \cdot (X,Y,i,j) = \\ (gXg^{-1}, gYg^{-1}, gi, jg^{-1}) \end{array} \right.$$

C_n kalles <u>Calogero-Moser rommet</u> (dim n).

<u>Alt. defn:</u> $\bar{C}_n = \{ (X,Y) \in M_n(k) \times M_n(k) : \mathrm{rk}(YX - XY - I_n) \leq 1 \}$

$\bar{C}_n / GL(n) \simeq C_n$
(samtidig konj.)

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Merk: $ij = 0 \Leftrightarrow rk = 0 \Leftrightarrow$ Representasjon i $\mathrm{Rep}_n(A_1)$
$ij \neq 0 \Leftrightarrow rk = 1 \Leftrightarrow$?

Det er altså her "ikke-assosiative repr."
$= A_\infty$-moduler kommer inn i bildet.

Teorem:

(a) C_n er glatt, irredusibel affin algebraisk varietet av dim. $2n$ ("generalisert Hilbert-skjema")

(b) La $C_n' \subseteq C_n$ svare til punkt. med Y diagonaliserbar.
Da har vi:

$$C_n' = \left\{ \begin{array}{l} X = (x_{ij}), \quad x_{ii} := \alpha_i, \quad x_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} \\ Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \\ i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j = (1\ 1 \ldots 1) \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{A}^{2n}$$

Koordinater:
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

X kalles Calogero-Moser matrise
(kommer fra visse PDE fra klassiske partikler kalt Calogero-Moser partikler)

Ref: Wilson, "Collision of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian" (Invent. '98)

"Adelic Grassmannian" $= \bigcup_n C_n$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

<u>Oppgave</u>: Regn ut C_n' for $n=2$.
(Mye morsom konjugering her!)

iii) <u>Tolkning av punktene i Calogero-Moser Rom</u>

Anta $A = A_1 = k\langle x,y\rangle/(yx-xy-1)$. Vi skal tolke punkten i C_n som visse "ikke-assos. moduler" = A_∞-moduler over A.

<u>Merk</u>:

i) A (assosiativ alg.) kan tolkes som en ~~A_∞-modul~~ A_∞-algebra konsentrert i grad 0:

$$\begin{cases} A^0 = A, \quad A^1 = A^2 = \dots = 0 \\ \cancel{\text{gradert}} \qquad m_2 : A \otimes_k A \to A \quad \text{"vanlig mult."} \\ m_1 = 0, \quad m_3 = m_4 = \dots = 0 \end{cases}$$

Vi fikserer denne A_∞-algebra strukturen.

ii) En venstre A_∞-modul over A (A_∞-algebra):

* $M = \bigoplus_i M^i$ gradert k-vektorrom
* $m_n : \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{n-1} \otimes M \to M$ gradert homomorfi av grad $2-n$
* Stasheff relasjonene $(S1), (S2), \dots$ skal holde.

<u>Eksplisitt</u>:

$m_1 : M \to M$ (grad 1) "differensial"
$m_2 : A \otimes M \to M$ (grad 0) "A-virkning"
$m_3 : A \otimes A \otimes M \to M$ (grad -1)
$\vdots$
"obstruksjoner for assosiativitet nm"

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Anta fra nå av at M er konsentrert i grad 0 og 1, dvs $M^i = 0$ for $i \neq 0,1$. (Konsentrert i grad 0 = "vanlig assosiativ modul" over A). Da kan vi beskrive M eksplisitt:

* $M^0 \xrightarrow{d} M^1$ kompleks av k-vektorrom $(d = m_1)$

* $\left\{ \begin{array}{l} A \otimes M^0 \xrightarrow{m_2^0} M^0 \\ A \otimes M^1 \xrightarrow{m_2^1} M^1 \end{array} \right\}$ virkning av A på M^0, M^1
(skriver $ap = m_2^0(a,p)$ $\forall a \in A, p \in M^0$
$aq = m_2^1(a,q)$ $q \in M^1$)

* $A \otimes A \otimes M^1 \xrightarrow{m_3} M^0$

* $m_4 = m_5 = \dots = 0$

Stasheff-betingelsene blir:

(S1) $d(ap) = a\,d(p)$ $\forall a \in A, p \in M^0$

(S2) $\left\{ \begin{array}{l} a(bp) - (ab)p = m_3(a,b,dp) \\ a(bq) - (ab)q = d(m_3(a,b,q)) \end{array} \right.$ $\forall a,b \in A, p \in M^0$, $q \in M^1$

(S3) "betingelse på m_3"

Vi har dessuten:

* (S4), (S5), ... er tomme
* (S1) + (S2) $\Rightarrow$ (S3) når $d: M^0 \to M^1$ er surjektiv.

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

"A_∞-modeller av grad/dim n":

Vi skal identifisere de A_∞-modulene som svarer til punkt i C_n. Sammenlikning med $\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{A}^2}$:

$\left\{\begin{array}{l} A_0 \longrightarrow A_0/I = V \\ 1 \longmapsto v_0 \end{array}\right\}$	$\left\{ M^0 \xrightarrow{d} M^1 \right\}$
$\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{A}^2}$	C_n

Defn: A_∞-modell av dim n er en venstre A_∞-modul konsentrert i grad 0 og 1 slik at

i) $d: M^0 \to M^1$ er surjektiv

ii) $\dim_k M^1 = n$

iii) $\exists\, i \in M^0$: $\begin{array}{l} A \longrightarrow M^0 \\ a \longmapsto a\cdot i \end{array}$ er $\underline{k\text{-lin}}$. isomorfi

iv) $\exists\, j \in \mathrm{Hom}_k(M^1, k) = (M^1)^*$ s.a.

$$\begin{cases} m_3(x, b, q) = 0 & \forall b \in A,\ q \in M^1 \\ m_3(a, y, q) = 0 & \forall a \in A,\ q \in M^1 \\ m_3(y, x, q) = j(q)\cdot i & \forall q \in M^1 \end{cases}$$

Merk: $m_3 = 0$ svarer til assosiativ A-modul = Representasjon av A_1. En modell som ovenfor er "nesten assosiativ".

Teorem:

Det er bijektive korrespondanser

$$C_n \cong \left\{ \begin{matrix} A_\infty\text{-moduler} \\ \text{av dimensjon } n \end{matrix} \right\} \Big/ \sim \;\cong\; \left\{ \begin{matrix} \text{høyre-ideal i} \\ A_1 \end{matrix} \right\} \Big/ \sim$$

(strikt iso. av A_∞-moduler) (isomorfi av moduler)

Ref: Berest, Chalykh. "A_∞-modules and Calogero-Moser Spaces" (Crelle, '07)

Overgangen mellom C_n og A_∞-moduler er helt eksplisitt. Følgende resultat er nyttig:

Prop:

Anta $\underline{M}: M^0 \xrightarrow{d} M^1$ kompleks av k-vektorrom med d surjektiv. Da har vi:

$$\left\{ \begin{matrix} A_\infty\text{-modul strukturer} \\ \text{på } \underline{M} = \text{"valg av} \\ m_2 \text{ og } m_3\text{"} \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{Kommutative diagram} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{End}_{C(k)}(\underline{M}) \arrow[d] \\ A \arrow[ur, "e"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathrm{End}_{\mathcal{H}(k)}(\underline{M}) \end{tikzcd}$$

der $C(k)$ = kategori av komplekser av k-vektorrom

$\mathcal{H}(k)$ = homotopi-kategorien

slik at:

(i) ρ er algebra homomorfi

(ii) e er k-lin. avbildning s.a. $e(1) = 1$.

Slogan: "A_∞ = assosiativ opp til homotopi"

Strikte iso'er på A_∞-siden = indre automorfismer

$\left(e_2(a) = f e_1(a) f^{-1},\ f \in \mathrm{Aut}_{C(k)}(\underline{M}) \right)$