Matrisefaktoriseringer, Massey-produkter og superpotensial

Eivind Eriksen — Papirbredden, 25/11/2010

① Matrisefaktoriseringer

k: kropp
S: kommutativ k-algebra integritetsområde
$f \in S$: $f \neq 0$, f ikke enhet

$\underline{MF(f)}$: matrisefaktoriseringer av $f \in S$

$$MF(f) = \{(\phi, \psi) \in M_n(S) \times M_n(S) : \phi\psi = \psi\phi = f \cdot I_n\}$$

$$\cdots \to S^n \xrightarrow{\psi} S^n \xrightarrow{\phi} S^n \to \cdots$$

La $A = S/(f)$, "hyperflate". Da er

$$\cdots \to A^n \xrightarrow{\bar\psi} A^n \xrightarrow{\bar\phi} A^n \xrightarrow{\bar\psi} A^n \xrightarrow{\bar\phi} A^n \to \cdots$$

eksakt. Derfor har vi $(\phi, \psi) \rightsquigarrow \operatorname{coker}(\bar\phi)$

$$MF(f) \longrightarrow \operatorname{Mod}(A)$$

Ofte ser vi på $S = k[[x_1, \dots, x_n]]$ eller $S = k[x_1, \dots, x_n]$, med f hyperflatesingularitet, evt. kvasihomogen.

Resultat: Anta S regulær lokal ring.

i) matrisefaktoriseringer $\longleftrightarrow$ MCM A-moduler

ii) Knörrer's periodisitet: $MF_S(f) \xrightarrow{\sim} MF_{S[[u,v]]}(f + uv)$

$$(\phi, \psi) \longmapsto \begin{pmatrix} \phi & u \\ -v & \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi & -u \\ v & \phi \end{pmatrix}$$

er ekvivalens av kategorier

(Kan generaliseres til det kvasi-homogene tilfellet).

Eks: $A = k[x,y]/(x^4+y^3)$

$S = k[x,y]$

$f = x^4 + y^3$ (kvasi-homogen – vekter $w_x = 3,\ w_y = 4$)

$$0 \leftarrow M_3 \leftarrow A^2 \xleftarrow{\varphi} A^2 \xleftarrow{\psi} A^2 \leftarrow \cdots$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} x^2 & -y^2 \\ y & x^2 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ -y & x^2 \end{pmatrix}$$

MCM A-modul med fri oppløsning

$B = k[[x,y]]/(x^4+y^3)$

$N_3 = B \otimes_A M_3 = \operatorname{coker}(\varphi)$

$$0 \leftarrow N_3 \leftarrow B^2 \xleftarrow{\varphi} B^2 \xleftarrow{\psi} B^2 \leftarrow \cdots$$

② Massey-produkter:

Oppgave: Regn ut $H(M_3)$ eller $H(N_3)$, det prorepresenterende hylleret til A-modulen M_3 eller B-modulen N_3 i eksemplet ovenfor.

Løsning (Arvid): $H = k[[u_1,u_2,u_3,u_4]]/(f_1,f_2,f_3,f_4)$ $\left\{ \operatorname{Ext}^i_A(M_3,M_3) \simeq k^4,\ i=1,2. \right.$

Massey-produkter

$$\begin{cases} f_1 = -u_1^2 + u_2^3 + 3u_1u_2u_4^2 - \frac{3}{2}u_2^2u_3u_4 + \frac{1}{2}u_3^4 \\ \qquad - \frac{3}{2}u_2u_3^2u_4^2 + \frac{3}{4}u_2^2u_4^4 - \frac{3}{4}u_3^3u_4^3 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = -2u_1u_3 + 3u_2^2u_4 - u_3^3 + u_1u_4^3 + 3u_2u_3u_4^2 \\ \qquad + u_3^2u_4^3 \\ f_4 = 0 \end{cases}$$

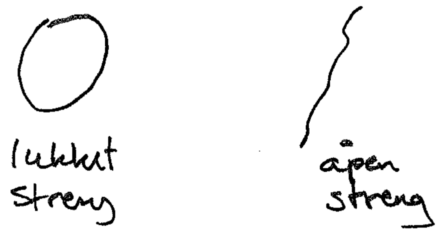
③ Litt om streng-teori

Standardmodellen:

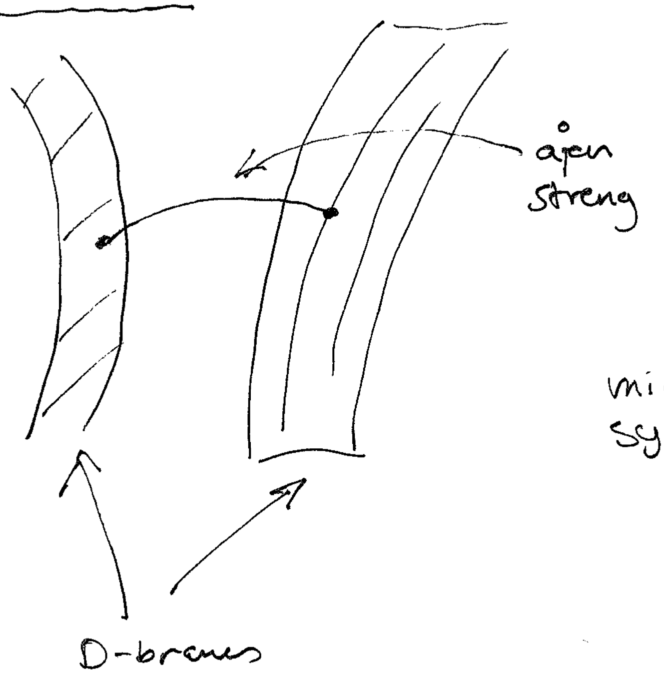
fermioner ⟷ matter
bosoner ⟷ forces

super-symmetri

Alt er strenger



D-branes:



Modellert vha kategorier:

D-branes : objekter
åpne strenger: morfismer

Varianter:

mirror symm.
IIA: Fukaya kategorier(X)
IIB: $D^b(\mathrm{coh}\,X)$

X Calabi-Yau

I IIB er D-branes av jevn dimensjon

Kontsevich; Orlov:

$D^b(\mathrm{coh}\,X)/\sim \;\leftrightarrows\; MF(W)$, W superpotensial
matrisefaktoriseringer

$A = S/(W)$, (Q,Q) MF.

$$\bar{P} = \{ P_0 \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightleftarrows}} P_1 \}$$

$$\varphi\psi = \psi\varphi = W I \quad \longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ \psi & 0 \end{pmatrix}, \; Q^2 = W \cdot I$$

Knapp, J. (Ph.D. thesis, arxiv)

Vi ser på følgende superpotensialer:

$$W = \begin{cases} x^{k+2} & A \text{ i } d=0 \\ x^{k-1}+xy^2-z^2 & D \text{ i } d=2 \\ x^3+y^4-z^2 & \\ x^3+xy^3-z^2 & E \text{ i } d=2 \\ x^3+y^5-z^2 & \end{cases} \longleftrightarrow$$

solvable CFT (conformal field theories)

jevn dimensjon pga IIB.

La (φ, ψ) være en matrise faktorisering av W. Da ser vi på

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ \psi & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^2 = \begin{pmatrix} \varphi\psi & 0 \\ 0 & \psi\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W\cdot I_n & 0 \\ 0 & W\cdot I_n \end{pmatrix} = W \cdot I_{2n}$$

slik at (Q,Q) er en ny matrise faktorisering av W.

Merk: 1) $0 \leftarrow M \leftarrow A^{2n} \xleftarrow{Q} A^{2n} \xleftarrow{Q} \cdots$ $\qquad A = S/(W)$

er fri oppløsning av $M = \operatorname{coker}(Q)$.

$$A^{2n} \xrightarrow{Q} A^{2n}$$
$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi\, \underline{y} \\ \psi\, \underline{x} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad M \simeq M_1 \oplus M_2, \quad \begin{cases} M_1 \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \leftrightarrow (\varphi,\psi) \\ M_2 \simeq \operatorname{coker}(\psi) \leftrightarrow (\psi,\varphi) \end{cases}$$

2) Følgende kompleks beregner $\operatorname{Ext}^i_A(M,M)$:

$$M^{2n} \xrightarrow{Q} M^{2n} \xrightarrow{Q} M^{2n} \xrightarrow{Q} \cdots$$

Dermed har vi

$$\operatorname{Ext}^i_A(M,M) = \ker Q / \operatorname{im} Q \quad \text{for alle } i \geq 1$$

Konklusjon: Det fins et (effektivt) superpotensial assosiert til A-modulen M. Vi kaller det W_{eff}, og ønsker å finne det.

Superpotensialer

Antar at vi har en dualitet som kommer fra en parring

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,M) \otimes_k \mathrm{Ext}^2_A(M,M) \xrightarrow{\sim} k\,,$$

dvs en lineær isomorfi $\alpha: \mathrm{Ext}^2_A(M,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(M,M)^*$.

La $T^1 = \hat{\mathrm{Sym}}_k(\mathrm{Ext}^1_A(M,M)^*) \cong k[[u_1,\dots,u_d]]$, $d = \dim_k \mathrm{Ext}^1_A(M,M)$
$T^2 = \hat{\mathrm{Sym}}_k(\mathrm{Ext}^2_A(M,M)^*) \cong k[[v_1,\dots,v_r]]$, $r = \dim_k \mathrm{Ext}^2_A(M,M)$

Minner om at vi har obstruksjonsmorfi gitt ved Masseyproduktene

$$\begin{aligned} T^2 &\xrightarrow{\;o\;} T^1 \\ v_i &\longmapsto f_i \in \underline{m}(T^1)^2 = (u_1,\dots,u_d)^2 \end{aligned}$$

Slik at $H \cong T^1/(f_1,\dots,f_r)$.

Se på:
$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "o"] & T^1 \\ \mathrm{Ext}^2_A(M,M)^* \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[ur, "o'"'] & \end{tikzcd}$$

o' k-lineær, og karakteriserer o

$$\begin{aligned} o' \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Ext}^2_A(M,M)^*, T^1) &\simeq \mathrm{Ext}^2_A(M,M)^{**} \otimes_k T^1 \simeq \mathrm{Ext}^2_A(M,M) \otimes_k T^1 \\ &\overset{\alpha}{\simeq} \mathrm{Ext}^1_A(M,M)^* \otimes_k T^1 = \underline{m}(T^1) = (u_1,\dots,u_d) \end{aligned}$$

Fra o (og derfor fra Massey-produktene) får vi bestemt et (effektivt) superpotensial i $\underline{m}(T^1)$.

Problem: Dette avhenger (kanskje) av α og av de valgte f_i'ene (dvs valg av basis mm).

Problem: Vi har $0 = \sum v_i^* \otimes f_i \mapsto \sum \alpha(v_i^*) f_i = W_{ett}$

$\in \mathrm{Ext}_A^2(M,M) \hat{\otimes}_k T' \qquad \in \underline{m}(T')$

Hverken f_i eller $\alpha(v_i^*)$ er kanonisk gitt.

Løsning: Definer W_{ett} til å være et potensial slik at

$$\left(\frac{\partial W_{ett}}{\partial u_1}, \frac{\partial W_{ett}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial W_{ett}}{\partial u_d} \right) = (f_1, \dots, f_r)$$

Dette kan kalkuleres, når vi bruker graderingen.

Eks: (Knapp) $W = \frac{1}{5}x^5$ (faktoren $\frac{1}{5}$ er konvensjon)

$$Q = x^2, \quad \varphi = \frac{1}{5}x^3 \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{1}{5}x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kan vise at:

$$H = k[[u_1,u_2]]/(f_1,f_2) \quad \begin{cases} f_1 = u_1^3 u_2 - \frac{2}{5}u_1^5 \\ f_2 = -\frac{1}{5}u_2^2 + \frac{3}{5}u_1^2 u_2 - \frac{1}{5}u_1^4 \end{cases}$$

Ser at: $\begin{array}{l} \deg u_1 = 1 \\ \deg u_2 = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \deg f_1 = 5 \\ \deg f_2 = 4 \end{array} \Rightarrow \deg \underline{W_{ett} = 6}$

$$r_1 = \int c_1 f_2 \, du_2 = c_1 \cdot \left(-\frac{1}{15}u_2^3 + \frac{3}{10}u_1^2 u_2^2 - \frac{1}{5}u_1^4 u_2 \right)$$

$$r_2 = \int (c_2 f_1 + c_3 u_1 f_2) du_1 = c_2 \cdot \left(\frac{1}{4}u_1^4 u_2 - \frac{2}{30}u_1^6 \right) + c_3 \left(-\frac{1}{10}u_1^2 u_2^2 + \frac{3}{20}u_1^4 u_2 - \frac{1}{30}u_1^6 \right)$$

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 r_2}{\partial u_1 \partial u_2} \Rightarrow c_1 \left(\frac{12}{10}u_1 u_2 - \frac{4}{5}u_1^3 \right) = c_2 \cdot \left(u_1^3 \right) + c_3 \cdot \left(-\frac{4}{10}u_1 u_2 + \frac{12}{20}u_1^3 \right)$$

$$\frac{12}{10}c_1 = -\frac{4}{10}c_3 \Rightarrow c_3 = -3c_1$$

$$-\frac{4}{5}c_1 = c_2 + \frac{12}{20}c_3 = c_2 + \frac{12}{20} \cdot (-3c_1)$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{4}{5}c_1 + \frac{9}{5}c_1 = c_1$$

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$$r_1 = C_1 \cdot \left(-\frac{1}{15} u_2^3 + \frac{3}{10} u_1^2 u_2^2 - \frac{1}{5} u_1^4 u_2 \right)$$

$$r_2 = C_1 \cdot \left(\frac{1}{30} u_1^6 - \frac{1}{5} u_1^4 u_2 + \frac{3}{10} u_1^2 u_2^2 \right)$$

$$\Downarrow$$

$$W_{eff} = C_1 \cdot \left(\frac{1}{30} u_1^6 + \frac{3}{10} u_1^2 u_2^2 - \frac{1}{5} u_1^4 u_2 - \frac{1}{15} u_1^3 \right)$$

Merk: i) W_{eff} kvasihomogent $\Rightarrow$ $k[\underline{u}] / (\partial W_{eff}/\partial u_i) = k[\underline{u}] / \left(W_{eff}, \frac{\partial W_{eff}}{\partial u_i}\right)$

= tangentrommet til deformasjonene av hyperflate sing. W_{eff}.

ii) $k[\underline{u}] / (\partial W_{eff}/\partial u_i) = k[\underline{u}] / (f_1, \dots, f_r)$ = algebraisering av H

= de infinitesimale deform som kan løftes

Spørsmål: Eksistens av W_{eff}?
Entydighet av W_{eff} (opp til k^*?)